

# Geometría III

## Examen XII

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Geometría III

## Examen XII

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Jesús Muñoz Velasco  
Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Geometría III.

**Curso Académico** 2023-24.

**Grado** Grado en Matemáticas.

**Grupo** A.

**Profesor** María Magdalena Rodríguez Pérez.

**Descripción** Prueba de clase (Tema 1).

**Fecha** 14 de noviembre de 2023.

**Ejercicio 1** (3 puntos). Encuentra un sistema de referencia  $\mathcal{R}$  de  $\mathbb{R}^2$  en el que los puntos  $(1, 2)$  y  $(3, 4)$  tengan coordenadas, respectivamente,  $(0, 0)$  y  $(0, 1)$ . Calcula el cambio de coordenadas de  $\mathcal{R}$  al sistema de referencia usual.

Como  $\mathcal{R}$  es un sistema de referencia de  $\mathbb{R}^2$ , será de la forma

$$\mathcal{R} = \{p, \mathcal{B} = \{e_1, e_2\}\} \quad p \in \mathbb{R}^2, \quad e_1, e_2 \in \overrightarrow{\mathbb{R}^2}$$

Sabemos que  $p = (1, 2)$ , ya que sus coordenadas son el  $(0, 0)_{\mathcal{R}}$ . Además, el segundo vector de la base de  $\mathcal{R}$  es el  $\overrightarrow{(1, 2)(3, 4)} = (2, 2)$ , ya que  $(3, 4) = (0, 1)_{\mathcal{R}}$ , y por tanto  $(3, 4) = (0, 0)_{\mathcal{R}} + 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = (1, 2) + e_2 \Rightarrow e_2 = (2, 2)$ . Nos faltará encontrar solo  $e_1$ . Como no se impone ninguna condición adicional en el enunciado bastará con que sea linealmente independiente de  $e_2$ . El  $(1, 0)$  nos vale. Consideremos entonces

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), \{(1, 0), (2, 2)\}\}$$

Con esto nos queda

$$M(\mathcal{R}_0 \leftarrow \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow (x, y)_{\mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (x, y)_{\mathcal{R}_0} = (x + 2y + 1, 2y + 2)_{\mathcal{R}}$$

**Ejercicio 2** (2 puntos). Demuestra que si  $a, b, c, d$  son cuatro puntos de un espacio afín  $\mathcal{A}$  tales que  $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$ , entonces se cumple que  $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bd}$ .

Esta es la identidad del paralelogramo. Su demostración es sencilla:

$$\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} = \overrightarrow{bd}$$

**Ejercicio 3** (3 puntos). Calcula la expresión explícita en coordenadas usuales de una aplicación afín de  $\mathbb{R}^2$  cuyo conjunto de puntos fijos sea la recta de ecuación implícita  $x = 1$  (en coordenadas de sistema de referencia usual) y tal que la imagen del origen sea el punto  $(2, 2)$ . ¿De qué aplicación se trata?

Como  $f(0, 0) = (2, 2)$  y sabiendo que  $f$  es una aplicación afín de  $\mathbb{R}^2$  podemos considerar

$$A = M(f; \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & b \\ 2 & c & d \end{array} \right)$$

Sabemos que tiene una recta de puntos fijos. Es decir,  $(A - I)(1, p) = 0 \Leftrightarrow p \in P_f$ .

$$(A - I) = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2 & a - 1 & b \\ 2 & c & d - 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2 & a - 1 & b \\ 2 & c & d - 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 + a - 1 + bp_2 = 0 \\ 2 + c + p_2(d - 1) = 0 \end{array} \right\} a = -1, \quad b = 0, \quad c = -2, \quad d = 1$$

Esta solución verifica la condición  $\forall p_2 \in \mathbb{R}^2$ . Por tanto nos queda

$$A = M(f; \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Veamos ahora qué aplicación es. Tenemos que  $|A| = -1$  por lo que tenemos un movimiento inverso con una recta de puntos fijos. Se trata de una reflexión axial con respecto a la recta dada por  $x = 1$ . Sin embargo no es ortogonal, como se puede ver al calcular  $f(0,0)$ . Estará orientada con respecto al vector  $\overrightarrow{(0,0)f(0,0)} = \overrightarrow{(0,0)(2,2)} = (2,2)$ .

**Ejercicio 4** (2 puntos). Sean  $\mathcal{A}$  un espacio afín,  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  una aplicación afín y  $\mathcal{S} = p_0 + \mathcal{L}(\{v_0\})$  una recta en  $\mathcal{A}$ . Demuestra que  $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$  si, y solo si,  $\overrightarrow{p_0f(p_0)} \in \mathcal{L}(\{v_0\})$  y  $v_0$  es un vector propio de  $\vec{f}$  de autovalor no nulo.

Veamos ambas implicaciones:

$\Rightarrow$ ) Sea  $p_0 \in \mathcal{S}$ . Entonces,  $f(p_0) \in f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ , por lo que  $\overrightarrow{p_0f(p_0)} \in \vec{\mathcal{S}} = \mathcal{L}(\{v_0\})$ .

Falta por ver que  $v_0$  es un vector propio de  $\vec{f}$  de autovalor no nulo. Como  $v_0 \in \vec{\mathcal{S}}$ , entonces  $\vec{f}(v_0) \in \vec{f}(\vec{\mathcal{S}}) = \vec{f(\mathcal{S})} = \vec{\mathcal{S}} = \mathcal{L}(\{v_0\})$ . Por tanto, se tiene que  $\vec{f}(v_0) = \lambda v_0$ , con  $\lambda \neq 0$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $p_0 \in \mathcal{S}$ , y veamos que  $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ . Tenemos que  $f(\mathcal{S}) = f(p_0) + \mathcal{L}\{\vec{f}(v_0)\}$ , y como  $v_0$  es un vector propio de  $\vec{f}$  de autovalor no nulo, entonces se tiene que  $f(\mathcal{S}) = f(p_0) + \mathcal{L}\{v_0\}$ .

Como  $p_0 \in \mathcal{S}$  y  $\overrightarrow{p_0f(p_0)} \in \vec{\mathcal{S}}$ , entonces  $f(p_0) \in \mathcal{S}$ , por lo que  $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ .